Demostración de la fórmula para calcular la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales.

Demostración:

Tomando en cuenta que,

$$\begin{aligned}(k+1)^3 &= (k+1)^2(k+1)\\ &= (k^2+2k+1)(k+1)\\ &= k^3+k^2+2k^2+2k+k+1\\ &= k^3+3k^2+3k+1\end{aligned}$$

entonces $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2+3k+1$

Si se hace $k = 1,2,3,4,\ldots, n$ en la expresión anterior, se sigue que para

$$\begin{array}{lcccc} k=1, & \cancel{2}^3 - 1^3 & = & (3)(1^2)+(3)(1)+1\\ k=2, & \cancel{3}^3 - \cancel{2}^3 & = & (3)(2^2)+(3)(2)+1\\ k=3, & \cancel{4}^3 - \cancel{3}^3 & = & (3)(3^2)+(3)(3)+1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ k=n, & (n+1)^3 - \cancel{n}^3 & = & 3n^2+3n+1\end{array}$$

Sumando lado a lado las n igualdades anteriores, se tiene

$$\begin{aligned}(n+1)^3 - 1^3 &= 3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+3(1+2+3+\cdots+n)+n\\ &= 3\sum_{k=1}^{n}k^2 + 3\sum_{k=1}^{n}k + n\end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned}3\sum_{k=1}^{n}k^2 &= (n+1)^3 - 1 - 3\sum_{k=1}^{n}k - n\\ &= (n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - (n+1)\\ &= \frac{2}{2}(n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - \frac{2}{2}(n+1)\\ &= \frac{1}{2}(n+1)[2(n+1)^2 - 3n - 2]\\ &= \frac{1}{2}(n+1)(2n^2+n)\\ &= \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1).\end{aligned}$$

Por tanto, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}n(n+\mathbf{1})(\mathbf{2}n+\mathbf{1})$.